Torres de Hanoi

El juego de las torres de Hanoi fue inventado por el matemático francés Edouard Lucas en 1883. Consiste de discos de radio creciente que se apilan en una de las estacas de un tablero y se deben traspasar a otra estaca siguiendo ciertas reglas. Este juego se inspiró de una leyenda sobre un templo hindú: "Al principio de los tiempos, a los sacerdotes de un templo hindú se les dieron tres postes y una pila de 64 discos de oro, cada disco un poco más pequeño que el de abajo. Su misión era transferir los 64 discos de uno de los tres postes a otro, con dos limitaciones importantes: solo podían mover un disco a la vez y nunca podían colocar un disco más grande encima de uno más pequeño. Los sacerdotes trabajaban muy eficientemente, día y noche, moviendo un disco cada segundo. Cuando terminaran su trabajo, dice la leyenda, el templo se desmenuzaría en polvo y el mundo se desvanecería".

Materiales

Cada kit contiene dos juegos de torres de Hanoi, cada uno de los cuales consta de:

- ⋆ Una base de acrílico en la que se ensamblan tres estacas.
- ⋆ Siete discos de diferente diámetro.

Instrucciones de uso

Quien participa debe mover la torre de discos desde una estaca a otra respetando dos reglas:

1. Debe mover solo un disco a la vez desde una estaca a cualquiera de las otras dos.
2. Al mover un disco, este nunca puede quedar sobre otro de menor tamaño.

El objetivo consiste no solo en mover todos los discos desde una estaca a otra predeterminada, sino también en hacerlo con la menor cantidad posible de movimientos.

Relación con las Bases Curriculares

Contenidos conceptuales

Eje Temático: Números

- ⋆ Recursividad.
- ⋆ Programación (pensamiento computacional).
- ⋆ Optimización.

Objetivos de aprendizaje

- ⋆ Visualizar la aparición de potencias de base natural y exponente entero en una situación concreta.
- ⋆ Inferir la cantidad mínima de movimientos por medio de la recursividad en una situación concreta.
- ⋆ Elaborar un programa computacional que implemente la cantidad mínima de movimientos.
- ⋆ Resolución de problemas; comunicación y argumentación; modelación.

Orientaciones para monitoras y monitores

1. Se sugiere comenzar con 2 discos en la estaca de la izquierda y pedir transportarlos a la de la derecha. Una vez logrado el desplazamiento, se pide contar los movimientos realizados y se pregunta: ¿es posible desplazarlos en una cantidad menor de movimientos? El objetivo es que se detecte el mínimo de movimientos necesarios, en este caso 3 (desde 5 años).

2. En un segundo nivel de dificultad, se sugiere realizar la misma actividad, pero esta vez con 3 discos (el número mínimo de movimientos ahora es 7), con 4 discos (15 movimientos) y con 5 discos (31 movimientos). La idea es que, tras esto, el o la participante conciba una estrategia para transportar una cantidad arbitraria de discos de una estaca a otra, y pueda anticipar el número mínimo de movimientos (recomendable a partir de 8 años).

3. En el mayor nivel de dificultad, se espera detectar (e intentar explicar) la fórmula de la cantidad mínima de movimientos, discutir su naturaleza exponencial y relacionarla con otros procesos que posean este comportamiento y con la leyenda del origen del juego.

Sustento matemático

Cantidad mínima de movimientos: Si se desea mover una cantidad arbitraria N de discos, entonces la cantidad mínima de movimientos es $2^N - 1$. En efecto, para mover k discos se requiere al menos mover los $k-1$ discos de arriba, desplazar el disco de abajo (el más grande) y reposicionar los $k-1$ discos sobre este. Por lo tanto, si $M(k)$ es la cantidad mínima de movimientos, se debe tener $M(k) = 1 + 2 \cdot M(k-1)$. Claramente, $M(1) = 1$, pues para mover un disco se requiere un solo movimiento. Concluimos entonces que $M(2) = 1 + 2 \times 1 = 3$, $M(3) = 1 + 2 \times 3 = 7$, etc. Esto nos lleva a la fórmula anunciada, pues si $M(k) = 2^k - 1$, entonces

$$M(k+1) = 1 + 2 \cdot M(k) = 1 + 2 \times (2^k - 1) = 1 + 2^{k+1} - 2 = 2^{k+1} - 1.$$

Esta fórmula nos indica que, cada vez que agregamos un disco, la cantidad de movimientos necesarios prácticamente se duplica, por lo que su crecimiento es exponencial. En particular, con 64 discos (como en la leyenda hindú), la cantidad mínima de movimientos es $2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$. Si los sacerdotes movieran un disco por segundo de manera ininterrumpida, tardarían millones y millones de años en terminar su tarea.

Codificación de movimientos: Lo anterior nos indica cómo proceder para mover los discos de manera óptima. En efecto, si ya sabemos hacerlo con un disco menos, entonces ejecutamos este proceso hacia la otra estaca, movemos el disco más grande una (y solo una) vez hacia la estaca final y luego ejecutamos nuevamente el proceso con todos salvo el último disco, pero esta vez hacia la estaca de destino.

Más información: Consultar el artículo “Las Torres de Hanoi” publicado en la “Revista del Profesor de Matemáticas”, disponible en este enlace: https://revistadelprofesor.files.wordpress.com/2012/05/revista-del-profesor-de-matematicas_ancc83o-1_nc2b0-2_pag-42-501.pdf