



El rompecabezas de Pitágoras

Se tiene constancia de que el “teorema de Pitágoras” era conocido -al menos en su aplicación práctica- mucho antes del matemático griego Pitágoras (580 - 500 a.C.). Por ejemplo, hay anotaciones sobre este en cuatro tablas Babilónicas que datan de alrededor del 1900-1600 a.C. Además, es mencionado en las escrituras védicas de la antigua India que contienen las llamadas “Sulbasutras” (800 o 400 a.C.), así como en escritos de la antigua China. Más aún, se cree que los egipcios se servían de cuerdas y nudos para establecer las líneas-guías de construcción. Por ejemplo, al unir los extremos de una cuerda doblada dos veces formando tres lados de 3, 4 y 5 nudos respectivamente, se obtiene un triángulo rectángulo, y por tanto un ángulo recto. Esta técnica sigue siendo aún usada por viejos constructores.

A la fecha hay más de 300 demostraciones diferentes, incluidas una atribuida a Leonardo da Vinci y otra atribuida a Albert Einstein. La más famosa, sin embargo, sigue siendo la que aparece en “Los Elementos” de Euclides. En general, hay dos tipos de demostraciones: por disección de polígonos o por semejanza de triángulos. Las demostraciones por disección se pueden ilustrar mediante rompecabezas geométricos como los de esta actividad.

Materiales

- ★ 1 puzle en madera con cuadrados diseccionados en 5 piezas.
- ★ 1 puzle en madera con cuadrados diseccionados en 7 piezas.
- ★ 1 puzle en madera con pentágonos regulares diseccionados en 11 piezas.

Instrucciones de uso

Las figuras construidas sobre los catetos de un triángulo rectángulo debidamente diseccionadas deben ser reensambladas para originar una figura de forma similar sobre la hipotenusa. Se utiliza un tablero al que le faltan las piezas de la figura correspondiente a la hipotenusa y se invita a quien participa a que, con las piezas de las figuras de los catetos, intente cubrir esa parte del tablero (usando todas las piezas y sin superposición).

Relación con las Bases Curriculares

Contenidos conceptuales

Eje Temático: Geometría

- ★ Teorema de Pitágoras.
- ★ Disección de polígonos.
- ★ Áreas equivalentes.

Objetivos de aprendizaje

- ★ Demostrar de forma concreta la validez del teorema de Pitágoras.
- ★ Generalizar el teorema de Pitágoras a polígonos (u otras figuras distintas a un cuadrado) sobre los lados del triángulo rectángulo.
- ★ Resolución de problemas; representación; argumentación y comunicación.

Orientaciones para monitoras y monitores

1. Se sugiere comenzar con el puzle de cuadrados diseccionados en 5 piezas. Una vez superada esta experiencia, se puede pasar a tangramas más elaborados (a partir de 7 años).
2. En un segundo nivel de dificultad, se sugiere plantear la siguiente pregunta: si se suman las áreas de las piezas que estaban en los catetos, ¿es igual esta suma al área del cuadrado sobre la hipotenusa? Tras esto, se recomienda orientar la discusión hacia el teorema de Pitágoras (recomendable desde 10 años).
3. Finalmente, se utiliza el puzle pentagonal. En este punto, las y los participantes tienden a dudar de que pueda hacerse el reensamble de piezas (la mayoría cree que la igualdad de áreas solo se cumple para cuadrados). Se pregunta, entonces, si la igualdad de áreas persiste si se usa hexágonos regulares, heptágonos regulares, etc. Finalmente, se interroga sobre la igualdad en el caso de utilizar cualquier otra figura (incluso no poligonal).

Sustento matemático

Los puzles utilizados funcionan en toda generalidad. Los puzles cuadrados implican la igualdad de áreas, que en términos algebraicos se traduce en el famoso enunciado: La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Si a , b son los largos de los catetos y c el de la hipotenusa, entonces esto se escribe: $a^2 + b^2 = c^2$.

Si cada miembro de esta igualdad se multiplica por el área del pentágono regular de lado 1 (unidad), se obtiene que la suma de las áreas de los pentágonos regulares construidos sobre los catetos es igual al área del pentágono regular sobre la hipotenusa: el puzle pentagonal confirma esto. Lo mismo sigue sucediendo si se coloca cualquier polígono regular; para obtener la equivalencia correspondiente, basta multiplicar ahora cada término por el área de dicho polígono de lado 1. Sin embargo, obtener disecciones puede volverse muy difícil.

No hay restricción alguna para el uso exclusivo de polígonos. Si se usan otras figuras de la misma forma, basta multiplicar cada término de la igualdad por el área de la figura de base 1 para obtener la equivalencia de áreas deseada. Un ejemplo es exhibido abajo.

El teorema de Pitágoras para hipopótamos: en la figura, la suma de las áreas de los hipopótamos sobre los catetos es igual al área del hipopótamo sobre la hipotenusa.

Más antecedentes: Consultar el artículo “Una nueva prueba del teorema de Pitágoras” de <http://images.math.cnrs.fr/Otra-prueba-del-teorema-de-Pitagoras.html>, publicado en el sitio de internet “Paisajes Matemáticos”.

