Sólidos platónicos

En el plano se puede trazar polígonos regulares de cualquier cantidad de lados. En el espacio, en cambio, hay solo 5 poliedros regulares: el cubo (o hexaedro), el tetraedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Estos son conocidos también con el nombre genérico de sólidos platónicos, pues Platón los menciona explícitamente en su diálogo "Timeo".

Se atribuye la primera demostración de este hecho al sabio griego Teeteto, quien usaba un argumento basado en los ángulos de los polígonos (regulares) que concurren a cada vértice. Siglos más tarde, estos sólidos sirvieron de base para que Euler diera con una fórmula notable que relaciona los elementos de cualquier poliedro convexo: si V, A y C denotan respectivamente la cantidad de vértices, aristas y caras, entonces $V - A + C = 2$.

Materiales

- ⋆ 1 set de sólidos platónicos armables en acrílico de 3 mm de espesor (4+8+20 piezas triangulares, 12 pentagonales, 6 cuadrados).
- ⋆ 5 dodecaedros en cartón troquelado y armable con elástico con decoraciones matemáticas.

Instrucciones de uso

Las piezas en acrílico cuadradas permiten armar el cubo y las pentagonales forman un dodecaedro. Las triangulares son usadas en el tetraedro, el octaedro y el icosaedro; el que sean de colores (y tamaños) diferentes según el poliedro evita que se confundan. Las y los participantes deben observar las piezas, para luego manipularlas delicadamente.

La muestra se complementa con dos piezas de cartón piedra que deben ponerse una frente a la otra haciendo coincidir sus centros y alternando sus puntas. La parte decorada con estrellas de cada pieza debe mirar hacia afuera, de modo que las piezas se doblen hacia adentro. Luego, se debe entrelazar un elástico entre las puntas de las dos piezas. En una superficie lisa se debe presionar el centro de las piezas y soltar con cuidado, como se observa en este video: https://www.youtube.com/watch?v=si-DjCWMUQE. Alternativamente, se puede lanzar al aire las piezas a una altura de poco menos de 1 metro y atrapar el dodecaedro al caer.

Relación con las Bases Curriculares

Contenidos conceptuales

Eje Temático: Geometría

- ⋆ Geometría $3d$.
- ⋆ Poliedros.
- ⋆ Sólidos platónicos.
- ⋆ Fórmula de Euler.

Objetivos de aprendizaje

- ⋆ Identificar los cinco sólidos platónicos.
- ⋆ Reconocer restricciones de la geometría $3d$ en relación con la geometría $2d$.
- ⋆ Establecer relaciones entre los elementos de un poliedro convexo.
- ⋆ Resolución de problemas; representación; argumentación y comunicación; modelación.

Orientaciones para monitoras y monitores

1. Quienes participan deben comenzar familiarizándose con las piezas acrílicas y armar los 5 sólidos platónicos. Se sugiere comenzar con los más sencillos y conocidos (cubo -o hexaedro-, tetraedro), para luego avanzar al octaedro y concluir con el dodecaedro y el icosaedro. En este proceso, se debiera asociar etimológicamente los nombres a la cantidad de caras (edra): tetra (4), hexa (6), octo (8), dodeka (12), (e)ikos (20). Tras esto, se debe proceder a desplegar el dodecaedro en cartón (recomendable desde los 6 años).

2. En un segundo nivel de dificultad, se sugiere centrar la conversación en torno a las propiedades de los sólidos con preguntas del tipo: ¿qué polígonos regulares aparecen como caras?, ¿hay alguna otra configuración regular, eventualmente con otros polígonos? Se recomienda promover la discusión sobre los ángulos de los polígonos; en particular, explicar por qué un polígono con un ángulo muy grande no puede ser empleado (recomendable a partir de 9 años).

3. En el nivel máximo de dificultad, se sugiere pedir a las y los participantes contar el número de caras, vértices y aristas de cada sólido platónico. Luego, se les puede preguntar: ¿existe alguna relación entre estas cantidades? La idea es orientar, de manera natural, hacia la fórmula de Euler. Finalmente, se puede repetir esto con otras formaciones poliédricas con las que nos encontramos habitualmente (balones deportivos, domos geodésicos, etc).

Sustento matemático

La prueba clásica de la existencia de exactamente 5 poliedros regulares (basada en consideraciones de ángulos) puede hallarse en la "Revista del Profesor de Matemáticas": https://revistadelprofesor.files.wordpress.com/2012/05/revista-del-profesor-de-matematicas_ancc83o-1_nc2b0-1_pag-8-15.pdf. La fórmula $V + C = A + 2$ fue conjeturada, pero no totalmente probada, por Euler. Una prueba "elemental" se encuentra en https://images.math.cnrs.fr/Un-error-geometrico-en-la-Liga-de-Campeones.html. Allí se puede encontrar, además, una discusión sobre su aparición en los diseños de balones deportivos. Es importante señalar que la fórmula solo vale para poliedros convexos ("esféricos" y "sin orificios"). Por ejemplo, en toda configuración toroidal (como la ilustrada abajo) se cumple una igualdad diferente: $V + C = A$. Este tipo de consideraciones son la base de una disciplina matemática llamada topología.